LYCEE SECONDAIRE
9 AVRIL 1938
Sidi Bouzid

Series: 4

$3^{ème}$ année T & SC

Exercice N°1

Pour $x \in IR$,calculer les expressions suivante en fonction de cosx et sinx

1- $\sin(5\pi - x)+\cos(\frac{5\pi}{2}+x)+\sin(\frac{5\pi}{2}-x)$

2- $\sin(x+\frac{3\pi}{2})+\sin(3\pi - x)+\cos(3\pi - x)+\cos(x+\frac{3\pi}{2})$

Exercice N°2

1- Calculer cosx et sinx sachant que tgx=2 et $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

2- Calculer cosx et tgx sachant que $\sin x=\frac{-1}{4}$ et $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

Exercice N°3

Démontrer les résultats suivants

1- $(\sin x+\cos x)^2=1+2\cos x\sin x$
2- $(\sin x-\cos x)^2=1-2\cos x\sin x$
3- $\cos^4x+\sin^4x+2\sin^2x\cos^2x=1$
4- $\cos^2x-\cos^2y=\sin^2y-\sin^2x=\frac{1}{1+tg^2x}-\frac{1}{1+tg^2y}$
5- $(tgx\,tgy)(cotgx+cotgy)=tgx+tgy$

Exercice N°4

1- a- Montrer que pour tous x et y réels on a : $\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y$

b- En déduire que pour tout x réel on a : $\cos x+\cos(x+\frac{2\pi}{3})+\cos(x-\frac{2\pi}{3})=0$

2- Montrer que pour tout x réel on a :

a- $2(1-\cos 2x)-\sin^2 2x=4\sin^4x$

b- $2\sin(\frac{\pi}{4}-x)\cos(\frac{\pi}{4}-x)=\cos 2x$

3- Montrer que pour tout $x \in IR-\{k\frac{\pi}{2}, k \in Z\}$,on a : $tgx+\frac{1}{tgx}=\frac{2}{\sin 2x}$

Exercice N°5

Simplifier les expressions suivantes

1- $(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2-2$
2- $\cos^4x-\sin^4x$
3- $\frac{\cos^2x-\sin^2y}{\sin^2x\sin^2y}$ - $cotg^2x\,cotg^2y$
4- $\cos^6x+\sin^6x$
5- $\frac{\sin 2x}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{\cos x}$

Exercice N°6

1- Montrer que $\cos^4x=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$

2- Montrer que $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$

3- Sachant que $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,donner la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $tg\frac{\pi}{24}$

4- Montrer que $tg^2\frac{\pi}{12}+tg^2\frac{5\pi}{12}=14$

Exercice N°7

1- Exprimer à l'aide de sin2x et cos2x
A= $\cos^2x-2\sin x\cos x-5\sin^2x$

2- Montrer que pour tout x réel tel que $\sin x \neq -1$ on a : $\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=tg^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})$

Exercice N°8

1- Calculer $A=\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{7x}{12}$; $B=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$

2- Montrer les égalités suivantes

a) $4\sin x\sin(x+\frac{\pi}{3})\sin(x+\frac{2\pi}{3})=\sin3x$

b) $\frac{\cos2x-\cos4x}{\cos2x+\cos4x}=tg3xtgx$

Exercice N°9

Soient $S=\cos(\frac{2\pi}{5})+\cos(\frac{4\pi}{5})$ et $S'=\cos(\frac{3\pi}{5})\cos(\frac{\pi}{5})$

1- Calculer $2S\sin(\frac{\pi}{5})$ en déduire les valeurs de S et S'

2- Montrer que $\cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5})=-\frac{1}{4}$ déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$

Exercice N°10

1- Soient $P_1=\cos(\frac{\pi}{5})\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $Q_1=\sin(\frac{\pi}{5})\sin(\frac{2\pi}{5})$

Calculer P_1Q_1 et en déduire la valeur de P_1

2- Soient $P_2=\cos(\frac{\pi}{7})\cos(\frac{2\pi}{7})\cos(\frac{3\pi}{7})$ et $Q_2=\sin(\frac{\pi}{7})\sin(\frac{2\pi}{7})\sin(\frac{3\pi}{7})$

Calculer P_2Q_2 en déduire la valeur de P_2

Exercice N°11

1- Montrer que pour $a\in IR-\{k\frac{\pi}{2},k\in Z\}$ on a : $\frac{1}{\sin2a}=\cot ga-\cot g2a$

2- En déduire la valeur de la somme

$S_n=\frac{1}{\sin a}+\frac{1}{\sin2a}+\frac{1}{\sin4a}+\dots\dots\dots\dots\dots\dots+\frac{1}{\sin2^na}$

Exercice N°12

1- Montrer que pour tout x réel on a : $\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\cos(x-\frac{\pi}{3})=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$

2- Déduire alors que : $\cos(\frac{5\pi}{12})+\sqrt{3}\sin(\frac{5\pi}{12})=2\cos(\frac{\pi}{18})$

3- Déduire donc $\frac{1}{\sin\frac{5\pi}{18}}+\frac{\sqrt{3}}{\cos\frac{5\pi}{18}}=4$

4- Soit $f(x)=1+\cos2x+\sqrt{3}\sin2x$

a) Vérifier que $f(x)=2\cos^2x+2\sqrt{3}\cos x\sin x$

b) Montrer alors que $f(x)=4\cos x\sin(x+\frac{\pi}{6})$

c) Calculer de deux manières $f(\frac{\pi}{12})$. Déduire alors $\cos\frac{\pi}{12}$

5- Pour $x\in\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[-\{\frac{\pi}{6}\}$ on considère $g(x)=\frac{1+\cos2x}{1+\cos2x+\sqrt{3}\sin2x}$

a) Montrer que $g(x)=\dfrac{\cos x}{2\sin(x+\frac{\pi}{6})}$

b) Calculer de deux manières $g(-\frac{\pi}{12})$.Déduire que $\cotg(\frac{\pi}{12})=2+\sqrt{3}$

Exercice N°13

I°- Soit x un réel tel que $\cos x+\sin x\neq 0$ et $\cos 2x\neq 0$

1- Montrer que : $\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\dfrac{1-\sin 2x}{\cos 2x}$

2- Sans calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$ .Déduire que $\tg\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$

3- Transformer alors en $r\cos(x-\theta)$ l'expression $\cos x+(2-\sqrt{3})\sin x$

II°- 1- Pour tout x réel montrer que $4\sin x\cos x\cos 2x=\sin 4x$

2- Déduire alors que $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}$

3- A l'aide de 2- Montrer que $\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}=-\frac{1}{2}$

4- Déduire que $-\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}=-\frac{1}{2}$

5- Calculer alors les valeurs de : $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$

Exercice N°14

Soit la fonction h définie par :$h\ x\mapsto 4\cos^2x+\sin 4x$

1- Montrer que pour tout x réel on a :$\cos^2(\frac{\pi}{4}-x)=\dfrac{1+\sin 2x}{2}$

2- En déduire que pour tout x réel on a : $h(\frac{\pi}{4}-x)=2\sin 2x+\sin 4x+2$

3- Calculer $f(\frac{\pi}{12})$et $f(\frac{\pi}{8})$

4- a) En déduire $\cos\frac{\pi}{8}$ puis $\sin\frac{\pi}{8}$

b) Montrer que $\tg\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$